E-mail: hegtdcano@mp.gov.in ☎9893076404

GOVT. TULSI COLLEGE ANUPPUR,(M.P.)
शासकीय तुलसी महाविद्यालय अनूपपुर, (म.प्र.)
Affiliated to Awadhesh Pratap Singh University, Rewa(M.P.)

PROJECT

Cayley Hamilton Theorem

SESSION – 2022-23

GUIDED BY

Dr. GITESHWARI PANDEY

ASSISTANT PROFESSOR

GOVT. TULSI COLLEGE,
ANUPPUR (M.P)

SUBMITTED BY

ANAND KUSHWAHA &
ANKUSH PATEL
(Students)
CLASS: - B.Sc. 1st year

GOVT. TULSI COLLEGE,
ANUPPUR (M.P)

PRINCIPAL
Govt. Tulsi College Anuppur
Distt. Anuppur (M.P.)

E-mail: hegtdcano@mp.gov.in ☎9893076404

Title..... Page No. 01

P1- प्रथम प्रगति प्रतिवेदन

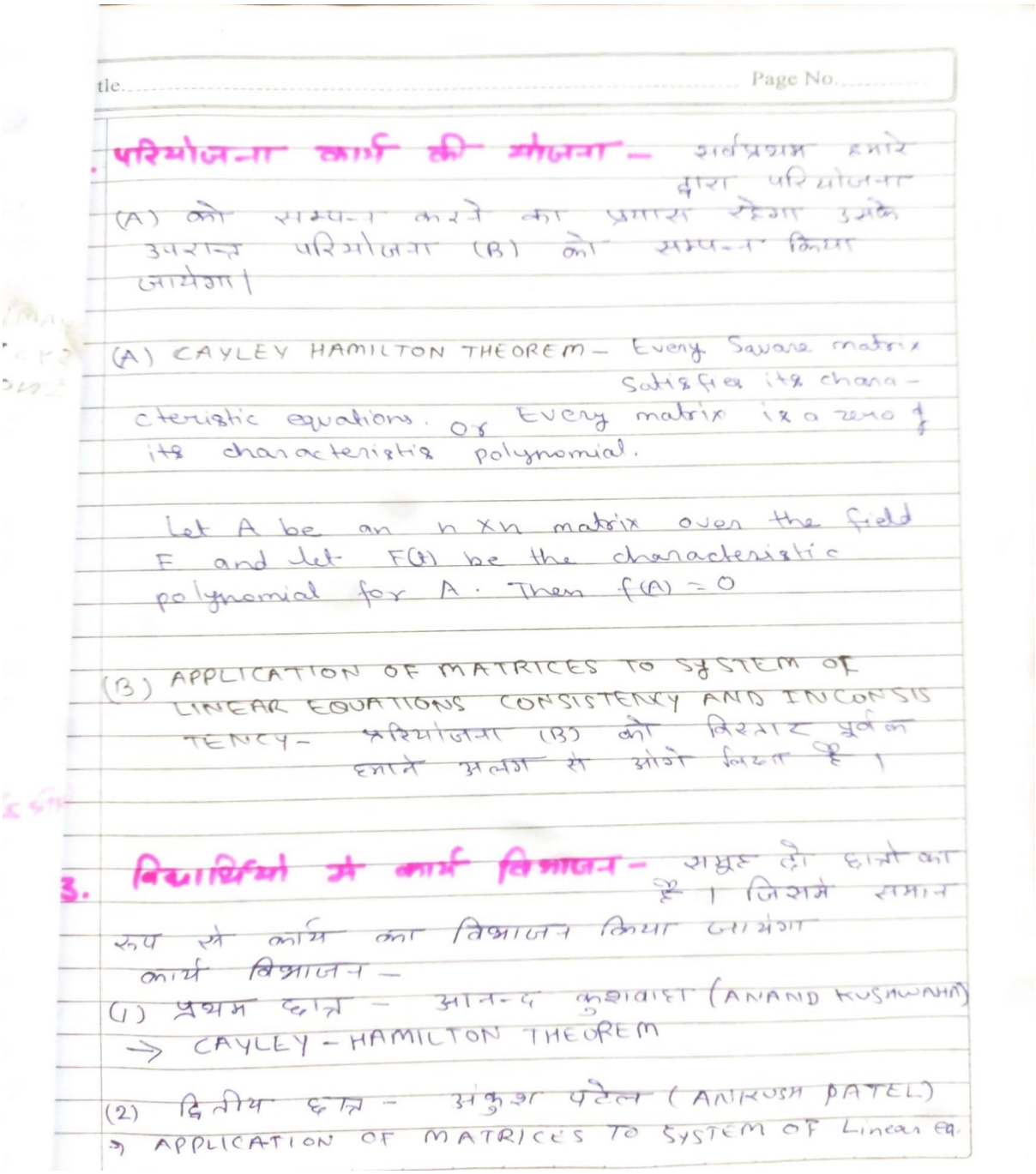
इस प्रोजेक्ट को दो लोग "आनन्द कुशवाहा और अंकुश पटेल" मिलकर पूरा कर रहे हैं। हमारे प्रोजेक्ट के Topic का नाम - (CAYLEY-HAMILTON THEOREM & APPLICATION OF MATRICES TO SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS, CONSISTENCY AND INCONSISTENCY) है।

हमने अपने प्रोजेक्ट के TOPIC से Related data, theorems, Example, questions तथा अपनी पाठ्यक्रम से और Google, स्वयं पोर्टल (Swyam-Portal), epg pathsala, लाइब्रेरी Youtube आदि के माध्यम से अध्ययन कर Data एकत्रित किया तथा लिये गये सभी परिभाषाएं theorems questions को विधिवत तरिके से कॉपी में लिखा गया है।

परियोजना कार्य का परिचय एवं क्षेत्र- परियोजना के अंतर्गत (A) CAYLEY-HAMILTON THEOREM (B) APPLICATION OF MATRICES TO SYSTEM & LINEAR EQUATIONS, CONSISTENCY AND INCONSISTENCY. विषयों पर परियोजना सम्पन्न करना है। तथा सभी बिन्दुओं पर विस्तृत प्रकाश डालना एक वृहद कार्य है जिनके लिए विभिन्न माध्यमों का उपयोग करना पड़ेगा।

विषय वस्तु अति महत्वपूर्ण है, एवं काफी सहज व सरल कहा जा सकता है।

E-mail: hegtdcano@mp.gov.in ☎9893076404



tle. Page No.

2. परियोजना कार्य की योजना – सर्वप्रथम हमारे द्वारा परियोजना (A) को सम्पन्न करने का प्रयास रहेगा उसके उपरान्त परियोजना (B) को सम्पन्न किया जायेगा।

(A) CAYLEY HAMILTON THEOREM – Every Square matrix Satisfies its characteristic equations. Or Every matrix is a zero of its characteristic polynomial.

Let A be an n x n matrix over the field F and let F(t) be the characteristic polynomial for A. Then f(A) = 0

(B) APPLICATION OF MATRICES TO SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS CONSISTENCY AND INCONSISTENCY – परियोजना (B) को विस्तार पूर्वक हमने अलग से आगे लिखा है।

3. विद्यार्थियों में कार्य विभाजन – समूह दो छात्रों का है। जिसमें समान रूप से कार्य का विभाजन किया जायेगा

कार्य विभाजन –

(1) प्रथम छात्र – आनन्द कुशवाहा (ANAND KUSHWAHA)
→ CAYLEY – HAMILTON THEOREM

(2) द्वितीय छात्र – अंकुश पटेल (ANKUSH PATEL)
→ APPLICATION OF MATRICES TO SYSTEM OF Linear Eq.

E-mail: hegtdcano@mp.gov.in ☎9893076404

tle..... Page No.....

सम्बंधित कार्य स्थल → परियोजना कार्य को पूरा करने के लिए विभिन्न स्थान से जानकारी एकत्रित की गयी है। सर्वप्रथम विषय वाद को समझ कर सरल व सहजता से internet की सहायता से जानकारी ली गई है।

तथा अतिरिक्त जानकारी का समीकरण अगली कक्षा में अध्ययनरत छात्र से लिया गया जायेगा तथा शिक्षिका के सही मार्गदर्शन से कार्य सम्पन्न हो गया

उद्देश्य तथा प्रासंगिकता → परियोजना कार्य के लिए परियोजना topics का समग्र अध्ययन एवं समग्र विस्तृत जानकारी तथा विभिन्न बिन्दुओं पर सम्पूर्ण अध्ययन है।

उद्देश्य - परियोजना कार्य को पूरा करने में कम से कम समय अवधि लगे इस पर प्रयास रहेगा परियोजना कार्य को सम्पन्न करने में 10/02/2023 दिनांक से प्रारंभ किया गया जिसे दो चरणों में समझ सम्पन्न किया गया जो 16/02/2023 दिनांक को पूर्ण हुआ

- प्रथम चरण - दो बिन्दुओं पर दिनांक 10/02/2023 से 14/02/2023
- द्वितीय चरण - शेष दो बिन्दुओं को 15/02/2023 से 16/02/2023 में सम्पन्न हो गया।

E-mail: hegtdcano@mp.gov.in ☎9893076404

Title..... Page No.....

CONTENTS

4 CAYLEY-HAMILTON THEOREM

6 APPLICATION OF MATRICES TO SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS, CONSISTENCY AND INCONSISTENCY

- Linear equation - Regular Case, Cramere's Solutions
- Non - homogeneous linear equations.
- Condition for Consistency
- Condition for a System of 'n' equations is 'n' unknown to have a unique Solution.
- Echelon form
- Working rule for finding the solution of the equation $AX = B$.
- Homogeneous linear equation.

E-mail: hegtdcano@mp.gov.in ☎9893076404

Title..... Page No. 1

CAYLEY-HAMILTON THEOREM

Statement : Every square matrix satisfies its characteristic equations

or

Every matrix is a zero of its characteristic polynomial.

or

Let A be an $n \times n$ matrix over the field F and let $f(t)$ be the characteristic polynomial for A. Then $f(A) = 0$

Proof : Consider an an-square matrix over a field F. i.e

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

The characteristic polynomial $f(t)$ of A is given by

E-mail: hegtdcano@mp.gov.in ☎9893076404

Title.....

Page No. 2

$$f(t) = |A - tI| = \begin{vmatrix} a_{11}-t & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-t & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}-t \end{vmatrix}$$

$f(t) = |A - tI| = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$, Say for $a_i s \in F$.

Thus, the characteristic equation of A is $f(t) = 0$

i.e. $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n = 0$.

The elements of the matrix $A - tI$ are polynomials at most of the first degree in t with the result that the elements of the matrix $adj\,(A - tI)$ are ordinary polynomials in t of degree $(n-1)$ or less. Also we know that the elements of the matrix $adj\,(A - tI)$ are the cofactors of the elements of the matrix $A - tI$. it implies that the matrix $adj\,(A - tI)$ and be written as

$$adj\,(A - tI) = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \dots + B_{n-1} t^{n-1}$$

E-mail: hegtdcano@mp.gov.in ☎9893076404

Title..... Page No. 3

Where B_i is a square matrix of order n over F with elements independent of t.

Now, by property of adjoints, we have

$$(A - tI)\,\text{adj}(A - tI) = |A - tI|\,I$$

or $$(A - tI)(B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \cdots + B_{n-1} t^{n-1}) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n) I.$$

Equating the coefficients of the corresponding powers of t, we get

$$\begin{aligned} AB_0 &= a_0 I \\ AB_1 - IB_0 &= a_1 I \\ AB_2 - IB_1 &= a_2 I \\ &\cdots \\ AB_{n-1} - IB_{n-1} &= a_{n-1} I \\ -IB_{n-1} &= a_n I. \end{aligned}$$

Multiply the above matrix equation by $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}, A^n$ respectively and adding, we get

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n = 0,$$

OFFICE, PRINCIPAL GOVERNMENT TULSI COLLEGE, ANUPPUR
Affiliated to Awadhesh Pratap Singh University Rewa (MP)
Registered Under Section 2 (F) & 12 (B) of UGC Act

E-mail: hegtdcano@mp.gov.in 9893076404

* NON - HOMOGENEOUS LINEAR EQUATIONS *

Consider m equations in n unknown $x_1, x_2 \ldots x_n$ in the following form:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

If we write

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} , B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

where A, X, B are $m\times n$, $n\times 1$ and $m\times 1$ matrices respectively, the above equation can be written in the form of a single matrix equation $AX = B$. A is called Coefficient matrix of the system (1).

Any set of values of $x_1, x_2 \ldots x_n$ which